



TITLE:

# 中性粒子の流れと相互作用する渦 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動 150年)

AUTHOR(S):

田中, 雅慶

---

CITATION:

田中, 雅慶. 中性粒子の流れと相互作用する渦 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年). 数理解析研究所講究録 2009, 1642: 101-108

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140602>

RIGHT:

## 中性粒子の流れと相互作用する渦

九州大学・総理工 田中雅慶(Masayoshi Tanaka)  
Department of Advanced Energy Engineering Science  
Kyushu University

中性粒子の流れと相互作用するプラズマは、従来考えられていたようなプラズマ固有のドリフトメカニズムによって渦を形成するのではなく、両者の相互作用に起因する力によって回転流れを生成する。そこでは、セナ効果と呼ばれる電荷交換相互作用に固有の大きな運動量交換過程が本質的な役割を果たす。

### 1. まえがき

弱電離プラズマは、数%程度の密度を占める電離ガス（プラズマ）と残りの大部分を占める中性粒子の共存系である。実験室では、中性粒子の温度はほぼ室温(0.025eV)であるのに比べ、プラズマの温度は電子で二桁以上、イオンでも一桁以上高い。弱電離プラズマは薄くて熱い流体と濃くて冷たい流体が同居していることになる。プラズマの流れの運動量を考えると、質量の小さな電子流体の寄与は無視でき、ほぼ全量をイオン流体が担っている。一方、中性粒子は遅い流れを形成するが、密度がプラズマより一桁高いので運動量はプラズマのそれと同程度である。これまで、イオン-中性粒子間の相互作用は十分弱く、弱電離プラズマは無衝突近似されることが多かった。その理由は、イオンと中性粒子の衝突過程では小角散乱の断面積が圧倒的に大きく、衝突による運動量交換は十分小さいと考えられたからである。

しかしイオン-中性粒子間に電荷交換過程が介在すると、まさに頻度の大きな小角散乱において大きな運動量交換が起こり、イオンと中性粒子の間で運動の結合が起こる。この運動量交換過程はセナ効果と呼ばれ、弱電離プラズマ中の衝突過程で最も重要なものである。もともとほぼ等しい運動量を持っているので、二つの流体の運動が結合した状況では、プラズマの運動はプラズマ自身で決まるというシナリオが保証されなくなる。セナ効果が存在するおかげで、プラズマ(イオン)と中性粒子の流れの結合は予想以上に普遍的に生起することになる。

プラズマ自身に話を限れば、流れを決める最も重要な力は電場である。プラズマは電荷中性を保つため、早くて逃げやすい電子を引き留めるように、中心部が正の静電ポテンシャル構造をつくる。このポテンシャルの勾配のために、プラズマ中には常に電場が存在し、電場による力と磁場によるローレンツ力がプラズマの流れ構造を決めていると良い。圧力勾配によって流れが決まる中性粒子とは対照的である。このように、異なる力学に従う二つの流体運動が結合した時、どのような流れ構造が形成されるのか、弱電離プラズマ中の渦形成を例として最近の実験結果を報告する。

## 2. 磁場中のドリフト運動

ここでは、外部磁場中に生成されたプラズマ(磁化プラズマ)を考えるが、はじめにプラズマの流れ構造を決める重要なメカニズムであるドリフト運動について述べ、その後、中性粒子との相互作用について述べる。

プラズマは荷電粒子の集合であるから、圧力のほかに電磁力が働く。以下では一様外部磁場中のプラズマを考える。通常磁化プラズマと呼ぶ時には、磁場の圧力がプラズマの圧力に比べて非常に大きい場合を指す。したがって、磁化プラズマ中に働く力として主要な力はローレンツ力である。さらに、電場による力と圧力勾配による力がこれに加わる。ローレンツ力が働くおかげで、プラズマは力の方向に素直にうごかない。定常状態における力のバランスを考えると、例えば、ローレンツ力  $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  と電場  $e\mathbf{E}$  による力が釣り合うと、

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{e} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1)$$

となり、プラズマは  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  方向に動く。この運動をドリフトと呼び、電場の場合は  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフト、圧力勾配の場合は反磁性ドリフト ( $-\nabla p \times \mathbf{B}$  方向に動く) と呼ばれる。重力など他の力が働いても同様であり、力と磁場の両方に垂直な方向にドリフト運動を行う。種々のドリフト運動の中で最も重要なものは  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトで、イオンと電子が同じ方向に(電荷依存性がない)、同じ速度で(質量依存性がない)動くという特徴を持っている。従って、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトはイオンと電子の中性流体的な(電流を伴わない)流れを生成する。

多くの場合この  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトが渦運動の源である。今、磁場に垂直な面内で静電ポテンシャルの2次元構造  $\phi(x, y)$  があったとする(磁力線に沿ってプラズマは一様になる傾向にある)、電場によるドリフトはこの場合

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{e}_z \times \nabla \phi}{B} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{e}_z \times \nabla \frac{e\phi}{M}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{B}/B \quad (2)$$

となる。ここで、 $\Omega = eB/M$  はイオンサイクロトロン周波数である。この流れは  $\nabla_\perp \mathbf{v} = 0$  を恒等的に満たすので、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  流れは非圧縮性流れである。この時、渦度の  $z$  成分は

$$\omega \propto \nabla_\perp^2 \phi \quad (3)$$

で与えられる。静電ポテンシャル  $\phi$  はこの場合、流線関数の役目をはたす。磁化プラズマ中の静電ポテンシャルの局在構造は、即ち、渦である言うことができる。

ここまで書くと、プラズマ中の流れ構造はドリフト運動だけで決まり、プラズマ自身で閉じているような印象を与えるが、二つの流体の運動が結合している場合には、プラズマの流れ構造がプラ

ズマだけで決まるとは限らない。

### 3. 電荷交換相互作用とセナ効果

中性粒子とイオンの衝突を考えると、運動量がほとんど変化しない小角度散乱の断面積は、大きな運動量変化を伴う大角度散乱の断面積に比べて圧倒的に大きい。この事実は、イオン-中性粒子間の衝突に伴う力の発生は十分弱く、プラズマを無衝突と考えてもよいとする考え方の根拠になっていた。しかし、まさにこの小角散乱において電荷交換過程が介在すれば、話は全く異なってくる。

今、二つの小角度散乱を考える(図1)。左図は電荷の移動がない通常の小角度散乱、右図は電荷交換を伴う場合を示している。二つの衝突で軌道は同じであるとする。イオンの衝突前後の運動量変化に着目すると、電荷の移動を伴わない左図の方は衝突前後でイオンの運動量ベクトルがほとんど変化しない。結果として、この衝突過程では運動量交換は少なく、イオンはほとんど力を受けない。一方、同じ軌道を取った場合でも、電荷交換が起こると、イオン $\leftrightarrow$ 中性粒子間で粒子のラベル交換が起こるため、イオンの衝突前運動量は衝突後には大きく変化していることになる。言い換えれば、この衝突によってイオンは大きな力を受けたことになる(当然中性粒子はその反作用を受ける)。これはセナ効果と呼ばれる運動量交換過程で、電荷交換衝突に固有のものである。電荷交換反応は二つの粒子がゆっくりすれ違うときにその確率が高くなるので、低温度の弱電離プラズマにおいて最も重要な衝突過程である。

セナ効果を考慮すれば、イオン-中性粒子の共存系をそれぞれ独立した無衝突の流体として扱う従来の考え方は不十分であることが容易に理解できる。上に述べたように、数%程度の弱電離プラズマはイオンと中性粒子がほぼ同程度の運動量を持っているので、二つの流体の運動が結合すれば、プラズマの流れ構造は二つの流体運動の競合によって決まる事になる。

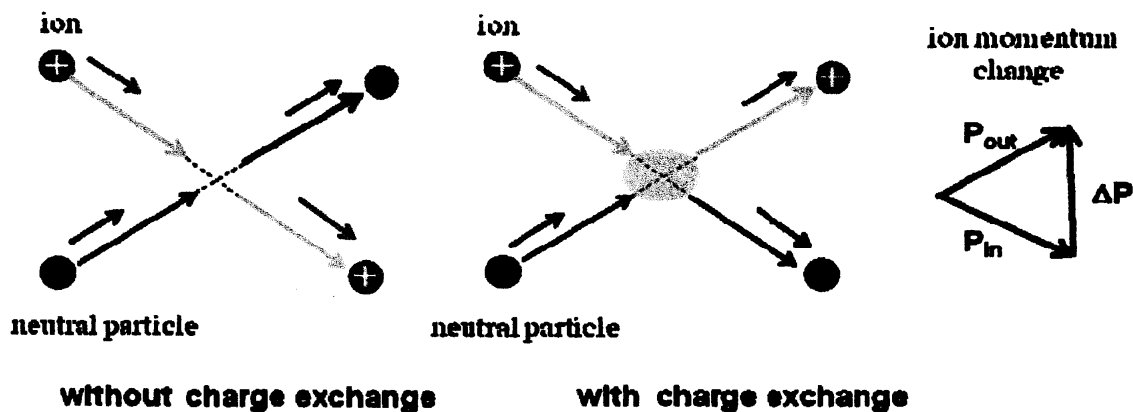


図1 イオン-中性粒子の電荷交換衝突とセナ効果

### 3. 逆 $E \times B$ 方向に回転する渦 [1]

図2に示しているのは、長さ 200cm 直径 30cm の円柱状プラズマを、一方の端から観測した CCD 画像である。図中白く見えている部分は、直径約 6cm 長さ 200cm の円柱状で、周囲のプラズマに比べて中心で約 3 倍の高密度になっている。周辺のプラズマは先に述べた  $E \times B$  ドリフトによって反時計方向に回転しているが、白く見えている部分は時計方向に回転している。周方向の回転速度分布を図3に示しているが、逆  $E \times B$  方向の回転速度はイオン音速( $C_s$ )の 10%以上になる。この逆  $E \times B$  回転の存在は、電場を凌ぐ力がプラズマに働いていることを意味していて、その力がどのような機構で発生するのかということが問題となる。

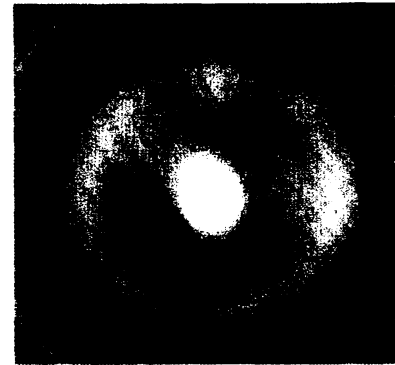


図2 逆  $E \times B$  方向に回転する渦 (中心部の白く見える部分)。

イオンの場合、圧力勾配による反磁性ドリフトは、 $E \times B$  ドリフトと同じ方向なので、その原因は圧力以外に求めなければならない。詳細な実験を行ったところ、逆  $E \times B$  回転が現れるときには、常に中性粒子の密度分布が急峻なくぼみ構造を形成していることが明らかになった。中性粒子分布の急峻な勾配はくぼみの中心に向かう流れを引き起こす。この流れとプラズマが相互作用を起こせば、上に述べたセナ効果によって大きな運動量交換が期待でき、結果としてイオンに大きな力が働くことになる。

これらを実験的に検証するためにはイオンおよび中性粒子の流れ場を正確に測定する必要があるが、プローブ法で測定できるイオンに比べ、中性粒子の流れ計測法はこれまで確立されていなかった。中性粒子の流れを直接測定しようとするレーザ誘起蛍光法によってドップラーシフトから流速を求めるこ

とになるが、おそい中性粒子の流れ(数 10m/s)を測定するためには  $10^{-7}$  の波長変化を測定する必要がある。結果として、1000m/s 程度の早い流れを測定した例はあったが、遅い流れの測定は行われたことがなかった。我々は、狭帯域波長可変半導体レーザーを用いた高精度誘起蛍光ドップラー分光システムを開発し、遅い中性粒子の流れの計測を可能にした[2]。

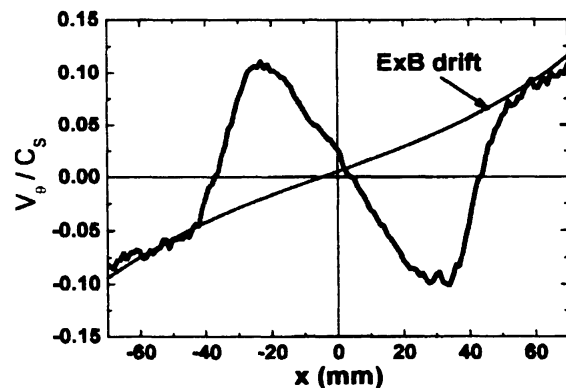


図3 逆  $E \times B$  方向に回転する渦の回転速度分布。速度はイオン音速で規格化されている。半径 4cm 以内では  $E \times B$  ドリフト(反時計周り)とは逆方向に回転している。

レーザー誘起蛍光分光法で測定された中性粒子の密度分布は逆  $E \times B$  渦が存在する付近で約  $1/4$  に減少しており、その周辺に急峻な密度勾配が形成されている。この密度勾配に伴う中性粒子の径方向流れは、最大で  $60\text{m/s}$  の内向き流れを形成している（図4）。一方、プローブ計測によれば、イオンの径方向流れはこの領域で外向きになっていることがわかった。これら二つの流体間で電荷交換衝突が起きれば、衝突前に外向きであったイオンの速度は衝突後には内向きとなり、結果としてイオンは内向きの力を受けることになる。この内向きの力によるドリフトは、逆  $E \times B$  方向（時計周り）になる。

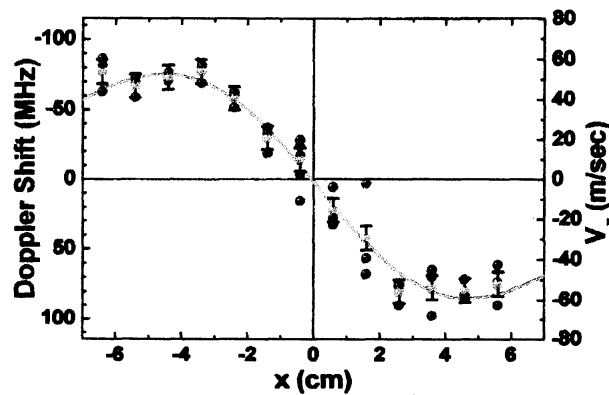


図4 中性粒子の径方向流速分布。内向きの流れであることを示している。

### 3. 中性粒子の流れと相互作用するイオンの運動

ここで中性粒子の流れと相互作用するイオンをモデル化する。それぞれの運動方程式は以下のように与えられる。

$$Mn_n \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_n \right] = -\nabla P + \nu_{in} Mn_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) \quad (4)$$

$$Mn_i \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right] = en_i (-\nabla \phi + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nu_{in} Mn_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) \quad (5)$$

ここで、 $\nu_{in}$  はイオンの電荷交換衝突周波数である。 $\phi$  は静電ポテンシャル、その他のシンボルは通常の意味で用いられている。イオンの温度は低いので、圧力項は他と比べて小さいとして無視した。定常状態を考え、流れは音速に比べて十分遅いとする。中性粒子を理想気体とみなし、状

状態方程式  $P = n_n T_n$  を用いてイオンの衝突項を消すと

$$en_i(-\nabla\phi + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla n_n T_n = 0 \quad (6)$$

となる。簡単のため温度の空間変化は小さいとすると(実際に実験でも確認されている)、(6)式よりイオンの垂直方向の流れは

$$\mathbf{u}_{i\perp} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{e}_z \times \left( \nabla \frac{e\phi}{M} + v_{in} D \nabla \ln n_n \right) \quad (7)$$

で与えられる。ここで  $D = (T_n / M) / v_{ni}$  は中性粒子の拡散係数、また  $v_{in} n_i = v_{ni} n_n$  を用いた。(7)式はイオンの流れが  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトによる流れ(第1項)と中性粒子との相互作用による流れ(第2項)から形成されていることを表している。中性粒子に起因する第2項については、もう少し踏み込んだ解釈もできる。アインシュタイン関係式を用いれば、拡散係数は移動度  $\alpha$  と温度を用いて

$$D = \alpha T_n \quad (8)$$

と書ける。これを用いて第2項を書き直すと、

$$\mathbf{u}_{i\perp}^{(n)} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{e} \times v_{in} \alpha \nabla (T_n \ln n_n) = \frac{1}{\Omega} \mathbf{e} \times v_{in} \alpha \nabla \mu_n \quad (9)$$

と表すことができる。ここで、括弧の中は定数項の違いがあるが中性粒子(理想気体)に対する化学ポテンシャル  $\mu_n$  等しい。すなわち、中性粒子との相互作用に起因するイオンの流れは、化学ポテンシャルの勾配によって駆動される中性粒子の流れ(運動量)が頻度  $v_{in}$  でイオンの流れ(運動量)を生成していると解釈することができる。結局(7)式は、イオンの流れが静電ポテンシャルと化学ポテンシャルの両方によって生成されることを示している。静電ポテンシャルと化学ポテンシャルをまとめて一般化されたポテンシャルと考えることも出来る(これはグッゲンハイムの電気化学ポテンシャルと呼ばれ 1930 年代に熱力学に導入されている[3])。

(7)式から渦度を計算すると

$$\omega_z = (\text{rot } \mathbf{u}_\perp)_z \approx \frac{1}{\Omega} \left[ \nabla_\perp^2 \frac{e}{M} \phi + v_{in} D \nabla_\perp^2 \ln n_n \right] \quad (10)$$

となる。ここで、簡単のため  $v_{in} D$  の空間依存性は弱いとした。実験で求めた周方向速度分布からイオンの渦度分布を決定することができる。イオンの流速測定から得られた渦度と(10)式の各項を比べて、イオンの逆  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  回転を決めているものが中性粒子であることを判定することができる。

図5に実測値から求めた渦度分布を示す。イオンの回転速度は  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  回転(図3参照)とそれに相対

的な回転の合成であるので、 $E \times B$  回転を差し引いた速度から求めたものを●印で表している。また、図には誘起蛍光分光法で得られた中性粒子密度分布から(10)式第2項を使って求めたものを実線で示している。中性粒子の絶対密度は得られていないので、振幅は任意単位として、分布の形状だけを合わせた。また、 $E \times B$  回転が作る渦度も示している。図に示しているように、イオンの逆  $E \times B$  回転に伴う渦度分布は中性粒子の密度分布から求めたものによく一致し、イオンと中性粒子の相互作用によって生じる力が逆  $E \times B$  回転の本質であることを示唆している。

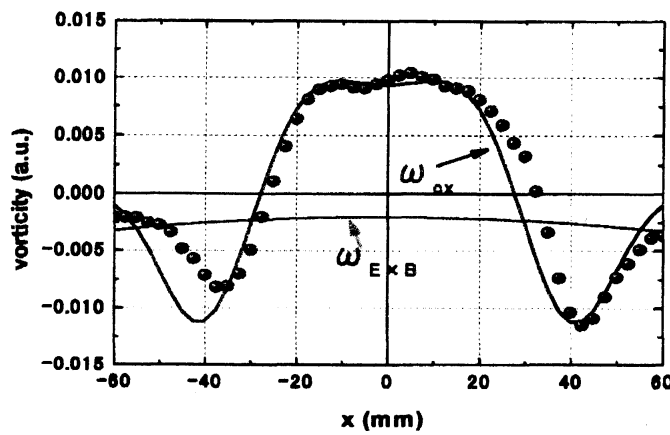


図5 逆  $E \times B$  回転する渦の渦度分布。●印は図3に示した速度分布から  $E \times B$  回転部分を差し引いた速度分布から求めたもの。  $\omega_{cx}$  は中性粒子密度分布から  $\nabla^2 \log n_n$  を用いて計算したもの(振幅は実験に合うように決めた)。  $\omega_{E \times B}$  は  $E \times B$  回転がつくる渦度分布。

最後に、中性粒子とイオンの相互作用が電場を凌ぐ条件を見積もってみる。中性粒子の効果が優勢になるのは、(7)式より

$$\left| \frac{\nabla e\phi / M}{v_{in} D \nabla \ln n_n} \right| \leq 1 \quad (11)$$

の条件が満たされた時である。ポテンシャルの特性長はプラズマの半径( $a$ )で決まり、中性粒子密度分布の特性長は電荷交換相互作用の平均自由行程( $\ell_{in}$ )の程度である。したがって(11)式は

$$\left| \frac{\ell_{in}}{a} \frac{e\phi / M}{v_{in} D} \right| \approx \frac{\ell_{in}}{a} \frac{e\phi}{T_c} \frac{T_c}{T_n} \frac{n_i}{n_n} \approx \frac{\ell_{in}}{a} \frac{n_e T_c}{n_n T_n} \leq 1 \quad (12)$$



となる．ここで、関係式  $v_{in}n_i = v_{ni}n_n$  を用いた．イオンと中性粒子の相互作用が弱ければ、 $T_n$  は常温 (0.025eV) 程度、一方電子温度は  $T_e \sim$  数 eV であるため、数%程度の電離度のプラズマでこの条件が満足されるには  $l_m/a \ll 1$  を満たすような高い中性粒子圧力が必要となるが、イオンと中性粒子が頻繁に相互作用するようになると、中性粒子の温度は上昇するので、より低圧力下でもこの条件を満たせるようになる．本実験の場合、中性粒子温度 0.1eV、電子温度約 5eV、電離度約 5%、 $l_m \sim 2\text{cm}$ 、 $a \sim 15\text{cm}$  を用いると、この比は 0.3 程度になっている．

### まとめ

中性粒子と相互作用するプラズマの渦について最近の実験結果を報告した．これまで、中性粒子の流れを測定することは困難であったが、半導体レーザーを用いた誘起蛍光ドップラー分光システムを開発し、中性粒子の流れ場の可視化が可能となった．

弱電離プラズマを考えると、イオンはダイナミックに運動し中性粒子は静的かつ一様なバックグラウンドを形成すると見なされてきた．これはイオンの質量密度 ( $n_i M$ ) にくらべて中性粒子の質量密度 ( $n_n M$ ) を無限大と考える近似と等価である．この場合、(5)式 ( $u_n=0$ ) のみがイオンの運動を決め、衝突項はイオンの運動に対する散逸効果を与える．しかしながら、今回の実験で明らかになったように、中性粒子にも空間的な不均一性が存在し、イオンと同様に流れている．即ち、弱電離プラズマは、中性粒子とイオンの運動が競合する系として取り扱わなければならない．

中性粒子とイオンの運動が結合しているとき、それぞれの運動を同時に考える必要があるだろうか？この問いに対しては、3 節で行ったように、イオンの運動に対して中性粒子の流れの効果は、“場”として考えることができる．荷電粒子に対して静電場があるように、中性粒子の流れの効果には化学ポテンシャルが対応している．つまり、イオンの運動は静電場と”物質場 ( $\ln[n_n]$ )”のなかの運動と捉える事が出来る．結局、逆  $E \times B$  回転する渦は、物質場の効果が静電場より勝ったために出現したと解釈できる．

### 参考文献

- [1] M. Aramaki et al., プラズマ・核融合学会招待講演(2008 年, 宇都宮)
- [2] M.Y. Tanaka et al., Vortex Formation in a Plasma Interacting with Neutral Flow  
ICTP International Workshop on the Frontiers of Modern Plasma Physics (2008, Trieste)
- [3] E. A. Guggenheim, *Modern Thermodynamics* (1933, Methuen, London)